17/03/2016

<u>Υπενθύμιση</u> $\mathbb{F}$ σώμα, $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$

(Στόχος: Μελέτη του πίνακα A ως προς όμοιο τύπο πινάκων, πιο συγκεκριμένα όταν γίνεται (δεν γίνεται πάντα) εύρεση διαγώνιου πίνακα όμοιου προς το A)

<u>Βασικά εργαλεία</u> → 1) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ του A
$$\text{"} \det(A - xI_\nu)$$

→ 2) Οι ιδιοτιμές του A, δηλαδή οι ρίζες στο $\mathbb{F}$ του $\chi_A(x)$. Αφού $\deg \chi_A(x) = \nu$, υπάρχουν <u>το πολύ</u> ν διαφορετικές ιδιοτιμές του A (Ανάλογα με το $\mathbb{F}$, μπορεί και να μην υπάρχουν)

→ 3) Για λ ιδιοτιμή του A, ο αντίστοιχος ΙΔΙΟΧΩΡΟΣ $V_A(\lambda)$ είναι ο (διανυσμ.) υπόχωρος $V_A(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu \times 1} \,\middle|\, A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\nu \end{pmatrix} \right\}$.

→ 1) Ο A λέγεται διαγωνίσιμος αν a) $\chi_A(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων, δηλαδή ~~[illegible]~~ $\chi_A(x) = (-1)^{\nu}(x-\lambda_1)^{a_1}(x-\lambda_2)^{a_2} \cdots (x-\lambda_p)^{a_p})$ όπου $\lambda_i \in \mathbb{F}$, διαφορετικά ανά δύο, $a_i \geq 1$ και $a_1 + \dots + a_p = \nu = \deg \chi_A(x)$

β) $\forall$ ιδιοτιμή λ_i του A, η αλγεβρ. πολλαπλότητα a_i του λ_i είναι ίση με τη γεωμετρική πολλαπλότητα: $\dim_{\mathbb{F}} V_A(\lambda)$ (δηλ. $\dim_{\mathbb{F}} V_A(\lambda) = a_i \ \forall \ i = 1, 2, \dots, p$)

Πρόταση

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τα ακόλουθα ισοδύναμα

i) A διαγωνίσιμος

ii) A όμοιος με διαγώνιο πίνακα $D \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$.

δηλ. $\exists$ $P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1} A P = D$, με D διαγώνιος

• Υποθέτουμε A διαγωνίσιμος. Πως βρίσκουμε τον D και πως βρίσκουμε τον P;

Απάντηση

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}_{a_1\text{-φορές}}, \underbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}_{a_2\text{-φορές}}, \dots, \underbrace{\lambda_p \dots \lambda_p}_{a_p \text{ φορές}}) \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$$

P = έχει στήλες μια βάση του $V_A(\lambda_1)$, μια βάση του $V_A(\lambda_2)$, ..., μια βάση του $V_A(\lambda_p)$

Πχ. ①

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Είναι ο A διαγωνίσιμος (επί του $\mathbb{R}$);

Λύση

$\chi_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$

Το $\chi_A(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή ~~....~~ *
Άρα από το a) του ορισμού, A όχι διαγωνίσιμος (επί του $\mathbb{R}$)

* $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

π.χ ②

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Είναι ο A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$;

Λύση

$\chi_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} =$

$= (1 - x^2) = (x-1)^2$

Ιδιοτιμές	ΑΛΓ. ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ	ΓΕΩΜ. ΠΟΛΛΑΠΛ
1	2	$\dim V_A(1) = 1$

Υπολογίζουμε $V_A(1)$ $\left(A - \underset{\lambda_1}{\underbrace{1}} \cdot I_2\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$(=)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \;(=)\; \begin{cases} x_2=0\\ 0x_1+0x_2=0\end{cases}$

Άρα $V_A(1)=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times1}: z_1, z_2\in\mathbb{R},\ z_2=0\right\}=$

$=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\0\end{pmatrix}: z_1\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ δηλ. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ βάση του $V_A(1)$. Άρα $\dim_{\mathbb{R}} V_A(1)=1$, δηλ. η γεωμ. πολλαπλ. της ιδιοτιμής 1 είναι ίση με 1.

Άρα ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος (επί του $\mathbb{R}$) γιατί για την ιδιοτιμή 1 του A, η αλγεβρική πολλαπλότητα δεν είναι ίδια με την γεωμ.

Π.χ. 3) $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$ είναι ο B διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{C}$;

$\chi_B(x)=\det(B-xI_2)=\begin{vmatrix}1-x&1\\0&1-x\end{vmatrix}=$

$=(1-x^2)=(x-1)^2$

Όπως στο Π.χ. 2), βρίσκουμε: ότι ο B δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{C}$

Παρατήρηση

Αν $B \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$ από το Θεμελ. Θεώρ. της άλγεβρας το $\chi_B(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{C}[x]$ σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων. Άρα το α) του ορισμού διαγωνιοποιήσιμου ισχύει για τον B (επί του $\mathbb{C}$). Το β) του ο.δ. μπορεί να ισχύει ή μπορεί να μην ισχύει, όπως είδαμε στο προηγ. π.χ. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Φυλ #2

(4) Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

α) Βήμα 1ο:

Υπολογισμός $\chi_A(x)$. Έχουμε $\chi_A(x) = \det(A - xI_3) =$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(x^2-6x+8) = (2-x)(x-4)(x-2) =$$
$$= -(x-2)^2(x-4)$$

Άρα

	Ιδιοτιμή	Αλγ. πολ.	Γεωμ. πολλαπλ.
$\lambda_1 =$	2	2	2
$\lambda_2 =$	4	1	1

Υπολογίζουμε τον ιδιόχωρο $V_A(2) \subset \mathbb{R}^{3\times1}$

Έχουμε $V_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (A - 2I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{3\times1} \right\}$

Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι ο $V_A(\underset{2}{\overset{\shortparallel}{\lambda_1}})$

έχει βάση $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα $\dim V_A(\lambda_1) = 2$

Υπολογίζουμε τον $V_A(\lambda_2) = V_A(4) =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| (A - 4I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{3\times1} \right\}$ Μετά τις

πράξεις βρίσκουμε $e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Βάση του

$V_A(\underset{4}{\overset{\shortparallel}{\lambda_2}})$

Συμπέρασμα: Αφού είδαμε ότι το $\chi_A(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων, και $\forall$ ιδιοτιμή λ του A η γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίσες, έπεται απ' τον ορισμό ότι A διαγωνιοποιήσιμο

- Υπολογίζουμε $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ αντιστρέψιμου και $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ διαγωνίου ώστε $P^{-1}AP = D$

Έχουμε $D = \mathrm{diag}(2, 2, 4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Επίσης από τη θεωρία

$$P = [\underbrace{e_1 | e_2}_{V_A(2)} | \underbrace{e_3}_{V_A(4)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εξήγηση Γιατί $P^{-1}AP = D$;

$\Updownarrow$ $AP = P \cdot D$

Απόδειξη

$$A \cdot P = A[e_1 | e_2 | e_3]$$

$$= [Ae_1 | Ae_2 | Ae_3]$$

$$PD = [e_1 | e_2 | e_3] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [\lambda_1 e_1 | \lambda_1 e_2 | \lambda_2 e_3]$$ Άρα $AP = PD \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ae_1 = \lambda_1 e_1 \\ Ae_2 = \lambda_1 e_2 \\ Ae_3 = \lambda_2 e_3 \end{cases}$$ που ισχύει

γιατί $$\begin{cases} (A - \lambda_1 I_3) e_1 = O_{3\times 1} \\ (A - \lambda_1 I_3) e_2 = O_{3\times 1} \\ (A - \lambda_2 I_3) e_3 = O_{3\times 1} \end{cases}$$

Υπολογισμός A^m $\forall$ $m \geq 1$

Έχουμε $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$ επομένως $\forall$ $m \geq 1$

$$A^m = (PDP^{-1})^m = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{m\text{-φορές}}$$

PD^mP^{-1} (1)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow D^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Υπολογισμός P^{-1}. Μετά τις πράξεις

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Από $(1)-(4) \Rightarrow A^m =$ (μετά τις πράξεις)

$$A^m = \begin{bmatrix} \frac{2^m+4^m}{2} & 0 & \frac{2^m-4^m}{2} \\ 0 & 2^m & 0 \\ \frac{2^m-4^m}{2} & 0 & \frac{2^m+4^m}{2} \end{bmatrix} \quad \forall\ m \geq 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

Fibonacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, αναδρομικά

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ για $n \geq 1$

Άσκηση.

Βρείτε, με χρήση διαγωνιοποίησης πινάκων, κλειστό τύπο για την a_n

Λύση

Γνωρίζω $a_3 = a_1 + a_2 \Rightarrow$

$a_2 = a_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ομοίως
$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Με επαγωγή
$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$
Άρα ο

υπολογισμός του a_n ανάγεται στον υπολογισμό της δύναμης A^{n-2} για τον 2×2 πίνακα A

$$X_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$$
με διακεκριμένες πραγματικές ρίζες

Ιδιοτιμή	Αλγ. πολ.	Γεωμ. πολ.
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1	
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	1	

όπως προηγουμένως, υπολογίζω

$$V_A(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : (A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi_{2\times 1} \right\}$$

$$V_A(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : (A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi_{2\times 1} \right\}$$

Μετά τις πράξεις βρίσκω $\dim V_A(\lambda_1) = 1 = \dim V_A(\lambda_2)$

Άρα A διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{R}$. Υπολογίζω $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = D$ και υπολογίζω το A^{n-2} όπως είναι προφ. η λύση

Τελικά συμπεραίνω μετά τις πράξεις

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Πρόταση

Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ όμοιοι πίνακες. Τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ (έχουν το ίδιο $\chi(A)(x)$)

Απόδ.

Αφού A, B όμοιοι υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος ώστε $B = P^{-1}AP$

Τότε συνεπώς $\chi_B(x) = \det(B - xI_\nu) =$

$= \det(P^{-1}AP - xI_\nu) =$

$= \det(P^{-1}AP - xP^{-1}I_\nu P) =$

$= \det(P^{-1}(A - xI_\nu)P) =$

$= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - xI_\nu) \cdot \det P =$

$= (\det P)^{-1} \cdot \det(A - xI_\nu)(\det P) = \chi_A(x)$

Παρατήρηση:

Ποιος είναι ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$;

Απάντηση: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$

Έστω

$\chi_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$, με $a_i \in \mathbb{F}$

Έχουμε $a_0 = \chi_A(0) = \det((A - xI_\nu)|_{x=0}) =$

$= \det(A - 0I_\nu) = \det(A)$

Άρα ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι ίσος με $\det A$

<u>Παρατήρηση</u>

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τ.Α.Ε.Ι.

i) $0_{\mathbb{F}}$ ιδιοτιμή του A

ii) $\det A = 0$

iii) A όχι αντιστρέψιμος

<u>Απόδειξη</u>

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) από Γ.Α.(Ι)

Υποθέτουμε i) Άρα $0_{\mathbb{F}}$ ρίζα του $\chi_A(x)$.

Από την παρατήρηση $\Rightarrow \det A = 0_{\mathbb{F}}$

Αντίστροφα από την παρατήρηση η $\det A$ είναι ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$, έχουμε $\det A = 0_{\mathbb{F}} \Rightarrow 0_{\mathbb{F}}$ ρίζα του $\chi_A(x)$.

Άρα (i) ισοδύναμο με το ii)